非線形整数計画問題の近似解法(連続と離散の最適化数理)

岩崎, 彰典; 白髪, 利晴; 太田垣, 博一; 仲川, 勇二; 成久, 洋之

数理解析研究所講究録
981 巻 1997 年 57-63

非線形整数計画問題の近似解法

岩崎　彰典・白髪　利晴[†]・太田垣　博一[††]
仲川　勇二[†††]・成久　洋之[††††]

岡山理科大学情報処理センター
[†]岡山理科大学大学院工学研究科電子工学専攻
[††]岡山理科大学工学部電子工学科
[†††]関西大学総合情報学部
[††††]岡山理科大学工学部情報工学科

1　はじめに

変数分離可能な非線形整数計画問題 *Separable Nonlinear Integer Programming Problem* (SNIPP) は次のように定式化される.

$$\text{maximize} \quad \sum_{n\in\mathcal{N}} f_n(x_n), \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{n\in\mathcal{N}} g_{mn}(x_n) \le b_m \quad m \in \mathcal{M}, \tag{2}$$

$$x_n \in \mathcal{K}_n = \{0, 1, 2, \ldots, K_n\}. \tag{3}$$

ここで, $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$, $\mathcal{M} = \{1, 2, \ldots, M\}$, b_m は各制約条件に対する制約許容量である.

単一制約を持つ非線形整数計画問題は Bretthauer [1] らによって分枝限定法の各ノードで連続緩和問題を解く方法が提案されている. しかし, 連続緩和問題を解く際に目的関数と制約関数の凸性と微分可能性を用いている. 複数制約を持つ非線形整数計画問題は Vassilev[2] らによって近似アルゴリズムが提案されているが, ここで扱われている問題は, 目的関数と制約関数が多項式である.

非線形整数計画問題は多次元非線形ナップザック問題と等価であり, 組合せ最適化の手法で解くときには, 問題の凸性や微分可能性を仮定する必要はない. 1次元（単一制約）非線形ナップザック問題は, 0-1ナップザック問題や多重選択ナップザック問題として多くの研究 [3, 4, 5, 6, 7] がなされ, NP-困難な問題であるにも拘らず, 実用的な規模の問題に対して有効な厳密解法が提案されている [8, 9]. これらの手法は, 整数優越性（IP dominance）を用いた動的計画法, 上限値を用いた限定操作（bounding）による分枝限定法を基礎としている. ところが, 多次元（複数制約）問題では整数優越の効率は極端に低下し, また良い上限値を高速に計算することも難しい. 多次元0-1ナップザック問題に対しては, Senju と Toyoda [10] が“有効勾配”を用いた近似解法を提案し, Nagazine と Oguz [11] がラグランジュ乗数を用いた上限値の計算と近似解を求める解法を提案している. 多次元非線形ナップザック問題は Marsten と Morin [12, 13] によって, 動的計画法と分枝限定法を組合せた厳密解法が提案されている. しかし, 実用的な規模の問題が解かれているわけではない. 実用規模の多次元非線形ナップザック問題を厳密に解くことは現実的に不可能であり, 有効な近似解法の開発が重要である. そこで我々は, 代理制約法 [14, 15] を用いた多次元非線形ナップザック問題の上限値を計算する方法と近似解法を提案する. 代理制約法を用いる利点は, 代理制約法によって生成される代理双対問題の解が上限値を与え, 近似解法による解の与える下限値と比較することにより解の品質を評価できることである. 本論文では, この解法を非凸な非線形整数計画問題へ適用しその有効性を示す.

2 代理制約法の非線形整数計画問題への適用

非線形整数計画問題 SNIPP に対する代理双対問題 SD は次式で定式化される．

$$\text{minimize} \quad \mathrm{opt}[S(\boldsymbol{u})], \tag{4}$$

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}, \tag{5}$$

但し，opt$[P']$ は問題 $[P']$ の最適値，

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{M-1})^T \in \boldsymbol{R}^{M-1},$$

$$\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^{M-1} : \sum_{m=1}^{M-1} u_m \leq 1, \boldsymbol{u} \geq 0\},$$

である．ここで導入された $\boldsymbol{u}$ は代理乗数と呼ばれ，また $S(\boldsymbol{u})$ は代理問題と呼ばれて次式で与えられる．

$$\text{maximize} \quad f(\boldsymbol{x}), \tag{6}$$

$$\text{subject to} \quad \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \leq \beta(\boldsymbol{u}), \tag{7}$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}, \tag{8}$$

但し，

$$\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = \sum_{m=1}^{M-1} u_m \{g_m(\boldsymbol{x}) - g_M(\boldsymbol{x})\} + g_M(\boldsymbol{x}),$$

$$\beta(\boldsymbol{u}) = \sum_{m=1}^{M-1} u_m (b_m - b_M) + b_M,$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \times \cdots \times \mathcal{K}_N,$$

とする．この代理問題は 1 次元非線形ナップザック問題である．

Luenberger [16] は，問題が準凸な非線形計画問題であれば，代理乗数 $\boldsymbol{u}$ を最適化することにより，代理双対問題の解が原問題の解に一致することを示した．代理双対問題の解が原問題の解に一致しないとき，代理ギャップが存在するという．非線形整数計画問題のような離散最適化問題へ代理制約法を適用した場合は，問題の離散性ため代理ギャップが存在し，代理双対問題 SD の解が原問題 SNIPP の実行可能解となるとは限らない．しかし，原問題 SNIPP の実行可能解の集合を $\mathcal{X}^{\mathrm{SNIPP}}$，代理問題 $S(\boldsymbol{u})$ の実行可能解の集合を $\mathcal{X}^S$ とすれば，

$$\mathcal{X}^{\mathrm{SNIPP}} \subseteq \mathcal{X}^S, \tag{9}$$

が成立するので，代理問題 $S(\boldsymbol{u})$ の厳密解 $\boldsymbol{x}^S \in \mathcal{X}^S$ は原問題 SNIPP のある上限値 $f(\boldsymbol{x}^S)$ を与える．我々は，モジュラアプローチ（MA）[8, 9] によって代理問題を厳密に解き，COP(Cut-Off Polyhedron) アルゴリズム [17] によってその解が与える上限値を最少にするように代理乗数 $\boldsymbol{u}$ を最適化する．この時，得られた解は原問題 SNIPP の良い上限値を与える [18]．

3 非線形整数計画問題の近似解法

非線形整数計画問題に対する代理双対問題の解は良い上限値を与えるが，実行可能になるとは限らない．そこで，我々は最適化された代理乗数をもつ代理問題から出発して近似解を求める方法を提案する．問題SNIPPの実行可能領域を$\mathcal{F}^{\rm SNIPP}$，代理双対問題の最適な代理乗数$\boldsymbol{u}$を$\boldsymbol{u}^{\rm SD}$，$\boldsymbol{u}^{\rm SD}$をもつ代理問題SDの実行可能領域を$\mathcal{F}^{\rm SD}$，その代理問題SDの厳密解を$\boldsymbol{x}^{\rm SD}$とする．もし，$\boldsymbol{x}^{\rm SD}$が原問題SNIPPで実行不可能ならば次式が成立する．

$$\boldsymbol{x}^{\rm SD} \notin \mathcal{F}^{\rm SNIPP} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{x}^{\rm SD} \in \mathcal{F}^{\rm SD}. \tag{10}$$

そこで，

$$\begin{aligned} \beta' = & \sum_{m=1}^{M-1} u_m^{\rm SD} \{ \sum_{n\in\mathcal{N}} g_{nm}(x_n^{\rm SD}) - \sum_{n\in\mathcal{N}} g_{nM}(x_n^{\rm SD}) \} \\ & + \sum_{n\in\mathcal{N}} g_{nM}(x_n^{\rm SD}), \end{aligned} \tag{11}$$

とすれば，$\beta' \leq \beta(\boldsymbol{u}^{\rm SD})$となるので，縮小された実行可能領域をもつ代理問題$S'(\boldsymbol{u}^{\rm SD})$を生成することができる．

$$\text{maximize} \quad f(\boldsymbol{x}), \tag{12}$$

$$\text{subject to} \quad \varphi(\boldsymbol{u}^{\rm SD}, \boldsymbol{x}) < \beta', \tag{13}$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}. \tag{14}$$

この問題の解を$\boldsymbol{x}'$とすれば，(13)式は制約式に等号を含んでいないので必ず$\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{x}^{\rm SD}$が成立し，$f(\boldsymbol{x}') \leq f(\boldsymbol{x}^{\rm SD})$である．そこで(11)式の$\boldsymbol{x}^{\rm SD}$を$\boldsymbol{x}'$で置き直して実行可能領域を順次縮小する操作を，実行可能解が得られるまで繰り返すことにより近似解（および近似解の与える下限値）を得ることができる．また，問題の離散性により$\boldsymbol{x}'$と代理問題の実行可能領域の境界との間にギャップが存在する場合が殆どであり，このギャップを刻み幅として実行可能領域を縮小していくため，かなり高速に近似解を得ることができる．

4 計算機実験

我々は，本手法を非凸2次形式ナップザック問題，生産計画問題へ適用し計算機実験を行った．本実験に用いた計算機はNEWS-5000VI(CPU R4000SC)である．

非凸2次形式ナップザック問題への適用

凸2次計画問題は重要な問題であり従来広く研究され，近年，非凸な問題へと拡張されている[19]．我々は変数分離可能な問題の例としてBretthauer [1] らの解いた2次形式ナップザック問題QPを取り扱う．本実験ではBretthauerらの問題を複数制約条件および非凸な問題へ拡張して本手法を適用した．2次形式ナップザック問題QPは次のように定式化される．

$$\text{maximize} \quad -\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2}d_i x_i^2 - a_i x_i), \tag{15}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \leq b, \tag{16}$$

$$l_i \le x_i \le u_i,\ \ i = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

$$x_i \quad \text{integer},\ \ i = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

ここで$b > 0$とする．係数 d_i が全て正ならば目的関数は凸となり，そうでなければ非凸となる．

まず Bretthauer らと同様に各係数を乱数で発生させ，$d_i \in [2, 28]$，$a_i \in [30, 80]$，$b_i \in [1, 13]$，l_i and $u_i \in [4, 15]$，$i = 1, \ldots, n$ とした．

制約条件の数をを１，２，５とし１０問を解いた結果の平均を表１に示す．制約条件の数が複数の場合でも，解いた１０問すべての問題で代理ギャップは存在せず，代理双対問題の解が実行可能な最適解となった．いずれの場合も１０００変数規模の問題を非常に高速に解いている．これは，この問題に対して整数優越が非常に有効に働いているためと思われる．

次に $d_i \in [-28, 28]$ とし非凸な目的関数をもつ問題を生成した．制約条件の数を１，２，５とし１０問を解いた結果の平均を表２に示す．相対誤差は上限値に対する下限値の相対誤差である．制約条件の数が複数の問題では，かなりのケースで代理ギャップが存在し，その場合は近似解法によって実行可能な近似解および下限値を求めた．実用的に有効な近似解が得られている．凸問題に比較すると計算時間が増大しているものの，かなり高速に解いている．このことは，本手法のアルゴリズムのなかで用いている整数優越操作や限定操作が，与えられる関数によっては，非常に有効であることを示唆している．

生産計画問題への適用

Bretthauer [1] らの解いた生産計画問題へ本手法を適用した．生産計画問題 PIM はは次のように定式化される．

$$\text{maximize} \qquad -\sum_{i=1}^{n}(c_i + d_i x_i + e_i/x_i), \tag{19}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \le b, \tag{20}$$

$$l_i \le x_i \le u_i,\ \ i = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

$$x_i \text{ integer},\ \ i = 1, \ldots, n, \tag{22}$$

ここで，問題の各係数は乱数を用いて与え，$b_i \in [5, 10]$，$c_i \in [50, 200]$，$d_i \in [0.5, 1.0]$，$e_i \in [50, 400]$，l_i and $u_i \in [8, 25]$，$i = 1, \ldots, n$ とした．

制約条件の数をを１，２，５としたときの結果を表3に示す．このとき，代理ギャップが存在する場合と存在しない場合があった．代理ギャップが存在する場合でも，近似解法を適用することにより上限値と下限値の相対誤差が 10^{-7} 程度の非常に良い近似解を得ることができた．

5　むすび

多次元非線形ナップザック問題へ代理制約法を適用し，上限値を求める方法と近似解を求める方法を提案した．この解法を非凸性を含む非線形整数計画問題へ適用し，多くの問題で最適解を得ることができ，またそうでない場合でも品質のよい下限値を持つ実行可能解を得ることができることを示した．

この研究は関西大学学術研究助成基金によるものである。

表 1: 凸 2 次形式問題

		変数の数	100	200	500	1000
制約数＝1	計算時間 (sec)	最大	0.017	0.017	0.050	0.100
		平均	0.008	0.012	0.038	0.088
		最小	0	0	0.017	0.067
制約数＝2	計算時間 (sec)	最大	0.017	0.033	0.050	0.100
		平均	0.002	0.012	0.038	0.093
		最小	0	0	0.033	0.083
	相対誤差	最大	0	0	0	0
		平均	0	0	0	0
		最小	0	0	0	0
制約数＝5	計算時間 (sec)	最大	0.017	0.033	0.050	0.100
		平均	0.010	0.015	0.045	0.097
		最小	0	0	0.033	0.083
	相対誤差	最大	0	0	0	0
		平均	0	0	0	0
		最小	0	0	0	0

表 2: 非凸 2 次形式問題

		変数の数	100	200	500	1000
制約数＝1	計算時間 (sec)	最大	0.950	0.400	2.583	9.733
		平均	0.193	0.345	2.317	8.890
		最小	0.067	0.117	2.150	8.483
制約数＝2	計算時間 (sec)	最大	0.283	0.883	8.133	21.633
		平均	0.137	0.437	4.125	15.302
		最小	0.083	0.317	2.117	8.283
	相対誤差	最大	0.000170442	0.000190568	0.000277029	4.218E-05
		平均	1.83637E-05	2.43127E-05	3.52044E-05	7.34496E-06
		最小	0	0	0	0
制約数＝5	計算時間 (sec)	最大	0.300	1.267	7.900	19.650
		平均	0.193	0.722	5.532	17.852
		最小	0.083	0.317	4.450	16.517
	相対誤差	最大	0.001877282	0.002418952	0.000544512	8.49074E-05
		平均	0.000384282	0.000304159	0.000185644	1.76975E-05
		最小	0	0	1.55402E-05	9.41789E-07

表 3: 生産計画問題

		変数の数	100	200	500	1000
		最大	0.483	0.867	12.350	43.917
制約数＝1	計算時間	平均	0.367	0.717	10.670	34.155
	(sec)	最小	0.183	0.067	9.117	27.150
		最大	0.633	2.233	20.617	73.650
	計算時間	平均	0.392	1.095	11.922	46.288
制約数＝2	(sec)	最小	0.183	0.683	9.167	26.033
		最大	1.4254E-06	3.85448E-07	8.06338E-08	8.58195E-08
	相対誤差	平均	1.4254E-07	9.77527E-08	1.35063E-08	2.07393E-08
		最小	0	0	0	0
		最大	0.467	2.183	23.867	83.833
	計算時間	平均	0.230	1.080	14.073	49.600
制約数＝5	(sec)	最小	0.017	0.700	9.100	26.333
		最大	5.67497E-07	3.07395E-07	1.24062E-07	4.67506E-08
	相対誤差	平均	8.92518E-08	8.01137E-08	3.39065E-08	7.25431E-09
		最小	0	0	0	0

参考文献

[1] K. M. Bretthauer and B. Shetty, "The Nonlinear Resource Allocation Problem", Oper. Res., Vol.43, No.4, pp.670-683, Jul.-Aug. 1995.

[2] V. Vassilev and K. Genova, "An approximate algorithm for nonlinear integer programming", European Journal of Operational Research, Vol.74, pp.170-178, 1994.

[3] R. D. Armstrong, D. S. Kung, P. Sinha and A. A. Zoltners, "A Computational Study of a Multiple-Choice Knapsack Algorithm", ACM. Trans. Math. Software Vol.9, No.2, pp.184-198, Jun. 1983.

[4] M. E. Dyer, N. Kayal and J. Walker, "A branch and bound algorithm for solving the multiple-choice knapsack problem", Journal of Computational and Applied Mathematics Vol.11, pp.231-249, 1984.

[5] S. Martello and P. Toth, Knapsack Problems, Algorithms and Computer Implementations, John Wiley, New York, 1990.

[6] R. M. Nauss, "The 0-1 knapsack problem with multiple choice constraints", European Journal of Operational Research, Vol.2, pp.125-131, 1978.

[7] P. Sinha and A. A. Zoltoner, "The Multiple-choice Knapsack Problem", Oper. Res., Vol.27, pp.503-515, May-Jun. 1979.

[8] 仲川勇二, "離散最適化問題のための新解法", 信学論 (A) Vol.J73-A, No.3, pp.550-556, Mar. 1990.

[9] 仲川勇二, 疋田光伯, 岩崎彰典, "多重選択ナップザック問題の高速厳密解法", 信学論 (A) Vol.J75-A, No.11, pp.1752-1754, Nov. 1992.

[10] S. Senju and Y. Toyoda, "An Approach to Linear Programming with 0-1 Variables", Manag. Sci., Vol.15, No.4, pp.B196-B207, Dec. 1968.

[11] M. j. Magazine and O. Oguz, "A heuristic algorithm for the multidimensional zero-one knapsack problem", European Journal of Operational Research, Vol.16, pp.319-326, 1984.

[12] R. E. Marsten and T. L. Morin, "A Hybrid Approach to Discrete Mathematical Programming", Math. Program. Vol.14, pp.21-40, 1978.

[13] T. L. Morin and R. E. Marsten, "An Algorithm for Nonlinear Knapsack Problems", Manag. Sci. Vol.22, NO.10, pp.1147-1158, Jun. 1976.

[14] F. Glover, "A multiphase-dual algorithm for the zero-one integer programming problem", Oper. Res. Vol.13, pp.879-919, Nov.-Dec. 1965.

[15] M. E. Dyer, "Calculating surrogate constraints", Math. Program. Vol.19, pp.255-278, 1980.

[16] D. G. Luenberger, "Quasi-convex programming", SIAM J. of Appl. Math., Vol.16, No.5, pp.1090-1095, Sep. 1968.

[17] 仲川勇二, 疋田光伯, 鎌田弘, "代理双対問題を解くためのアルゴリズム", 信学論 (A) Vol.J67-A, No.1, pp.53-59, Jan. 1984.

[18] 岩崎彰典, 太田垣博一, 仲川勇二, 宮下文彬, 成久洋之, "代理制約法の多次元非線形ナップザック問題への適用", 信学論 (A) Vol.J78-A, No.8, pp.1065-1068, Aug. 1995.

[19] 今野浩, "大域的最適化法の現状", 情報処理 Vol.36, No.11, pp.1062-1069, Nov. 1995.